

A1 图灵机与莱斯定理

2024 年 3 月 17 日

作业提交注意事项

- (1) 本次作业提交截止时间为 **2024/03/31 23:59:59**, 截止时间后不再接收作业, 本次作业记零分;
- (2) 作业提交方式: 使用 SELearning 提交, 请将个人资料中的“姓氏”和“名”用中文命名, 否则可能会影响成绩统计

1 全停机问题

$\hat{K} = \{\#M : \text{图灵机 } M \text{ 对于所有输入停机}\}$.^a ^b 证明 \hat{K} 不可判定.^c

注意: 本题不可以使用莱斯定理,^d 只能使用自我指涉, 对角线构造, 或者规约等方法.^e

^a $A = \{a : p(a)\}$ 的意思是, A 是一个集合且 $p(a) = \text{True} \leftrightarrow a \in A$. 此处的 $p(a)$ 为谓词命题 (predicate proposition). 大家可能对 $\{a : p(a)\}$ 这种集合的表示形式不太熟悉, 但是这种表示与大家更加熟悉的 $\{a|p(a)\}$ 表达形式是等价的.

^b $\#M$ 表示图灵机 M 的编码. 记全体图灵机的集合为 \mathcal{M} , 则图灵机编码可以视为一个函数 $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{N}$, 使得 $\forall M \in \mathcal{M}, f(M) = \#M$.

^c由于图灵机和大家写的 C 程序在表达能力上是等价的 (为什么?), 所以这道题也可以从 C 程序的角度去思考 (而且这样思考会更加简单), 不妨尝试一下.

^d能使用莱斯定理的话, 这题就太简单了.

^e你可以选择一个或者多个方法, 但是我们不保证任何一种选择都能做得出来, 你需要考虑一下什么方法会比较合适.

2 莱斯定理的使用

试说明下述两个集合是否可判定 ^a ^b ^c

1. $C = \{\#M : M \text{ 是一个全常数函数}\}$

2. $T = \{\#M : M \text{ 是一个全函数}\}$

^a全函数 (total function): 如果函数 $f : A \rightarrow B$ 对于任意 $x \in A$, $f(x)$ 都有定义, 那么称 f 为 total function. 大家在离散数学里学到的 function 都是 total function. 与 total function 相对应的是 partial function, 例如对于函数 $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1/x$. f 是 partial function, 因为 $f(0)$ 没有定义, 但是 $0 \in \mathbb{N}$.

^b常数函数 (constant function): 即形如 $\forall x \in \text{dom}(f), f(x) = c$ 的函数 (c 为常数).

^c此处考虑的函数均为一维数论函数. 一维数论函数的集合为 $\{f|f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}$