

A2 Lambda 演算

2024 年 3 月 18 日

作业提交注意事项

- (1) 本次作业提交截止时间为 **2024/04/07 23:59:59**, 截止时间后不再接收作业, 本次作业记零分;
- (2) 作业提交方式: 使用 SELearning 提交, 请将个人资料中的“姓氏”和“名”用中文命名, 否则可能会影响成绩统计

本次作业中:

1. 斜体代表变量, 例如 x, f, g .
2. 黑体代表函数的 Church 编码, 例如用 **True** 代表 $\lambda x. \lambda y. x$
3. 斜体上方横线代表 Church numeral, 例如 \bar{n} 代表 $\lambda f. \lambda x. f^n x$.^a
4. 标准体表示我们定义的函数 (例如 Pred, Sub).

^a心细的你也许发现 lambda 表达式的语法中并不允许含有 f^n 这种东西. 没错, 这里只是一个简便记法, 它的意思是 $(\underbrace{f(f(\dots(f x)))})_n$.

1 幂运算

定义幂运算, 使得 $\text{Pow } \bar{n} \bar{m} =_{\beta} \bar{n}^{\bar{m}}$. 此处 \bar{n}, \bar{m} 分别为 n, m 的 Church 编码, $\bar{n}^{\bar{m}}$ 为 n^m 的 Church 编码, $n, m \in \mathbb{N}$ (注: 可以使用之前已经定义过的函数)

2 计算 lambda 表达式

1. 给定前驱函数 $\text{Pred} \equiv \lambda n. \lambda f. \lambda x. n(\lambda g. \lambda h. h(gf))(\lambda u. x)(\lambda u. u)$, 给出计算 $\text{Pred } \bar{n}$ 的结果 (需要列出具体步骤).
2. 给定减法函数 $\text{Sub} \equiv \lambda m. \lambda n. n \text{ Pred } m$, 给出计算 $\text{Sub } \bar{n} \bar{m}$ 的结果 (需要列出具体步骤), 并说说可能的问题.

3 Leq 函数

请给出小于等于函数 Leq 的 lambda 表达式, 使得:

$$\text{Leq } \bar{n} \bar{m} =_{\beta} \begin{cases} \mathbf{True}, & n \leq m \\ \mathbf{False}, & n > m \end{cases} \quad (3.1)$$

此处 \bar{n}, \bar{m} 分别为 n, m 的 Church 编码, $n, m \in \mathbb{N}$.

4 斐波那契函数

给定斐波那契数列的递归定义如下:

- $F(0) = 0$
- $F(1) = 1$
- $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$

你需要写出函数 F 的 lambda 表达式, 并且该表达式中不能带有 F 本身. 换言之, 你需要通过不动点组合子消除递归.